

實驗 5：轉動與轉動慣量實驗

Lab 5: Rotational Motion and Moments of Inertia

編撰：國立清華大學物理系普物實驗課程團隊，版本：V2

一、目的

測量不同形狀之物體繞特定軸作旋轉運動時的轉動慣量，及驗證角動量守恆定律。

實驗內容包括：

- [A] 圓盤與圓環的轉動慣量、
- [B] 直立圓盤的轉動慣量、
- [C] 圓盤的偏離軸心轉動慣量、
- [D] 角動量守恆。

二、原理

(1) 轉動運動和平移運動的比較

物體平移運動的牛頓第二定律方程式為

$$F = ma \quad (1)$$

方程式中 m 為物體的慣性質量(inertia mass)， F 為物體所受的淨外力， a 為運動加速度。對於轉動運動，方程式改為以淨力矩(net torque) τ 、轉動體的轉動慣量(moment of inertia) I 和角加速度(angular acceleration) α 分別對應平移運動方程式中的作用力 F 、慣性質量 m 和加速度 a 。物體轉動運動的方程式為：

$$\tau = I \alpha \quad (2)$$

其中，角加速度 α 為角速率(angular velocity) ω 的變化率 $\alpha = d\omega/dt$ 。角速度 ω 則為物體角度 θ 的變化率 $\omega = d\theta/dt$ 。

表 1 列出物體作平移運動或轉動時，其運動方程式及力學公式的對照比較。

表 1、平移運動與轉動的常用公式對照。

	平移運動	對某一固定軸之轉動
動能	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
平衡	$\sum F = 0$	$\sum \tau = 0$
牛頓第二定律（力矩形式）	$\sum F = ma$	$\sum \tau = I\alpha$
牛頓第二定律（運動學形式）	$\sum F = \frac{dp}{dt}$	$\sum \tau = \frac{dL}{dt}$
動量、角動量	$p = mv$	$L = I\omega$
動量、角動量守恆	$p_i = p_f$	$L_i = L_f$
功率	$\mathcal{P} = Fv$	$\mathcal{P} = \tau\omega$

若一外力 $\vec{F}$ 作用在轉動物體上，作用點至轉軸的距離為 $\vec{r}$ ，則作用之力矩 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 。
當作用力 $\vec{F}$ 的方向與 $\vec{r}$ 垂直時，可得力矩大小為 $\tau = rF$ 。

本實驗施加一力矩 τ ，測量物體角加速度 α ，透過(2)式可求得物體轉動慣量 I 。

(2) 轉動慣量

若不考慮摩擦力和空氣阻力等因素，物體平移運動的難易程度(慣性)通常和運動體的形狀和運動方向無關，僅取決於運動體的質量。但物體轉動的難易程度，不僅取決於物體的質量，也取決於物體繞轉軸的位置和方向。一個質量為 m 到轉軸距離為 d 的質點，其轉動慣量 (rotational inertia) $I = m d^2$ 。對具有體積、形狀的物體，其轉動慣量依質量分佈、形狀、繞轉的旋轉軸不同，而有不同的值。

圖 1 中列出不同幾何形狀，具高對稱性的均質剛體，繞不同軸旋轉時的轉動慣量。

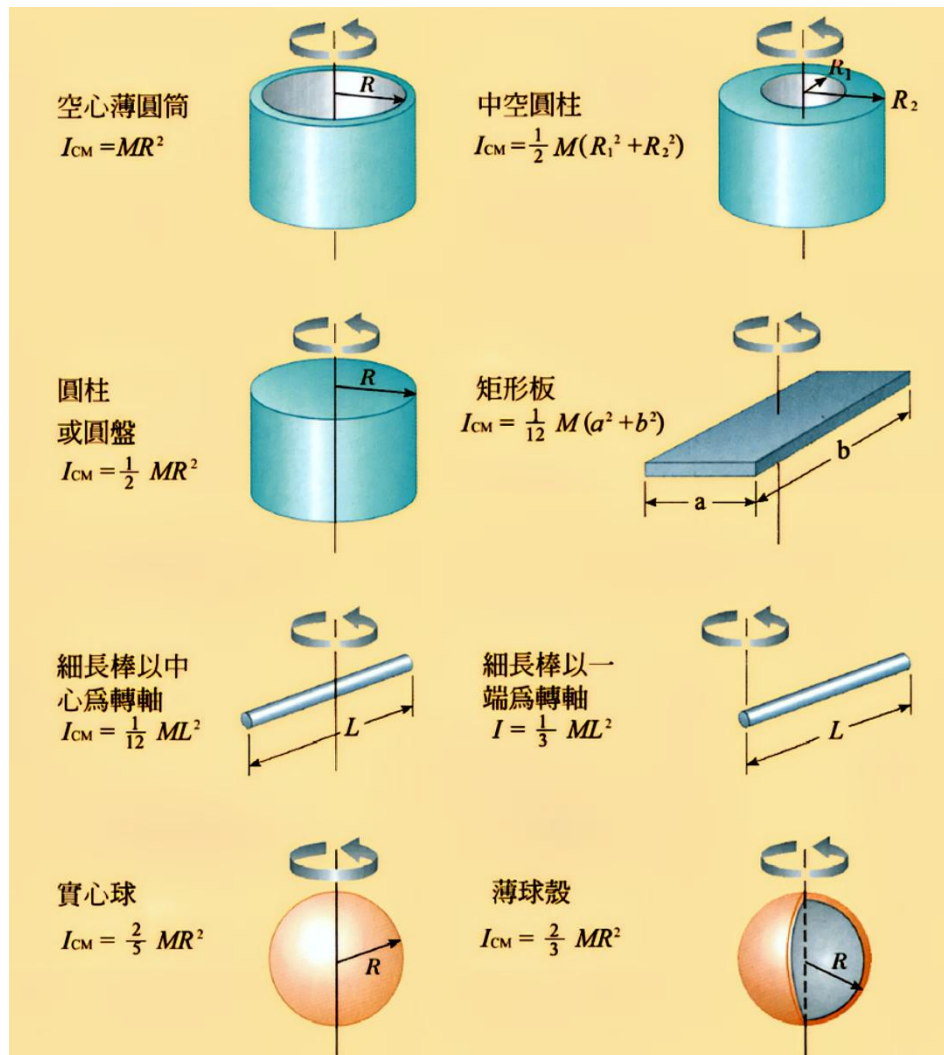
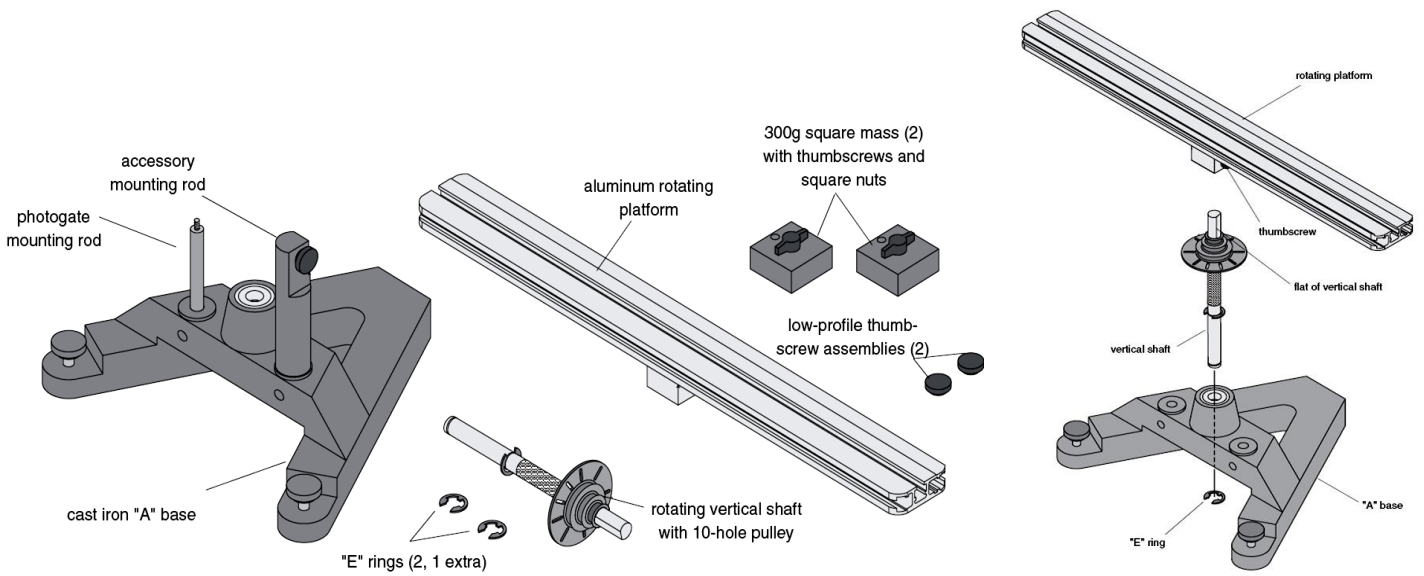


圖 1、不同幾何形狀之均質剛體的轉動慣量公式。

三、實驗器材：

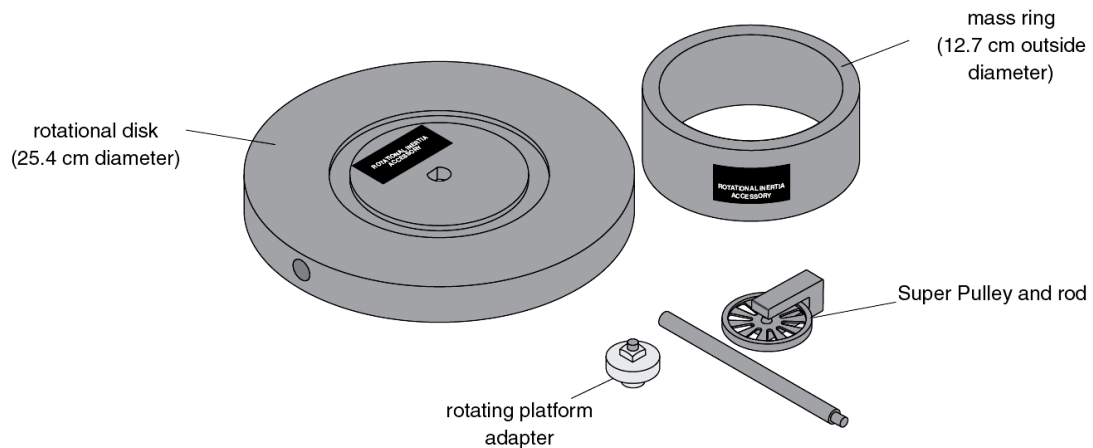
主要器材如圖 2 所示。

1. 轉動測量基台：如圖 2(a)所示，含 A-型底座、轉動平台、轉動基台零件、10 孔遮斷片等。
2. 轉動慣量配件：如圖 1(c)所示的剛體圓盤、剛體圓環和滑輪組等。
3. 光電閘：見圖 1(d)。
4. Arduino 光電閘數據紀錄盒：見圖 1(e)。



2(a) 轉動平台組件。

2(b) 轉動平台組裝示意圖。



2(c) 剛體圓盤、圓環待測物及滑輪組件。



2(d) 光電閘。

2(e) Arduino 光電閘數據紀錄盒。

圖 2、轉動平台與各組件。

四、儀器介紹和組裝

1. 轉動平台組裝(configuration of rotation platform)：

若實驗使用轉動平台(長直形金屬)，組裝方式如圖 2(b)所示。先將支撐桿插入 A 型底座 (A base)，在支撐桿底部套入 C 型環 (E rings)，使之固定。再將轉動平台中央下方的 D 形固定孔插進支撐桿上端。注意配合支撐桿頂部形狀方向。

2. 轉動平台底座的水平調整：

轉動平台需保持水平(旋轉轉軸保持鉛直)。可按下列步驟調整水平：

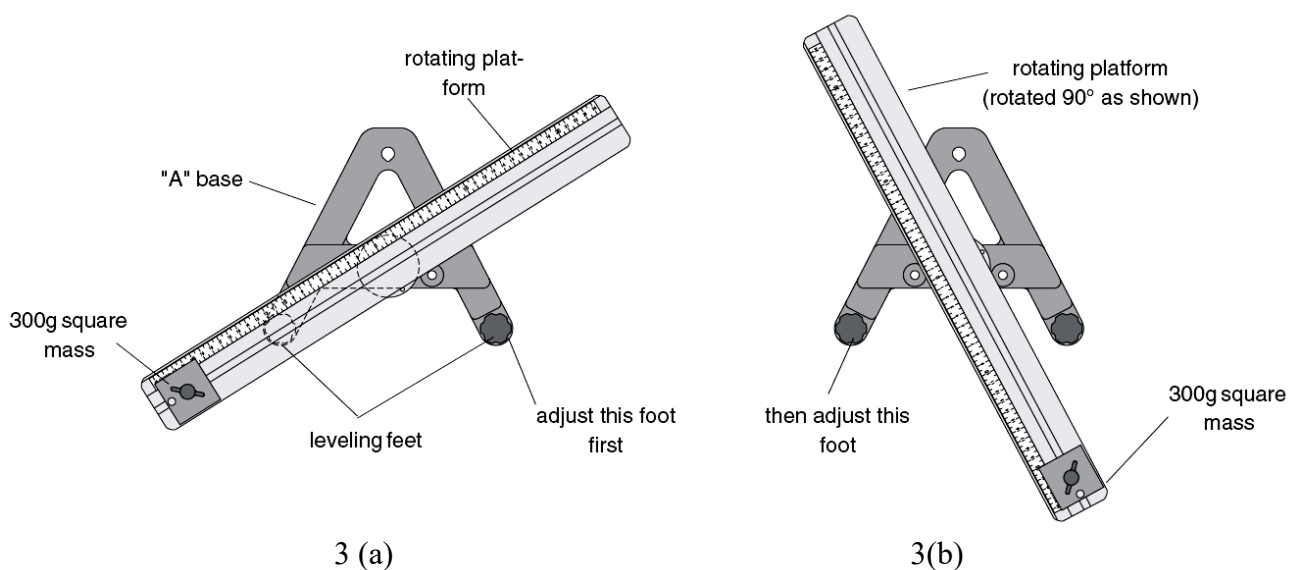


圖 3、轉動平台底座水平調整步驟示意圖。

- (1) 如圖 3 所示，將重約 300 克的方形重物(300 g square mass)放在軌道的任何一邊邊緣，以所附螺絲將之拴緊於轉動平台上。
- (2) 軌道平台對準底座左腳的螺絲，如圖 3(a)所示，調整右腳的螺絲，直到軌道能夠平穩的停留在這個位置(放手後不會旋轉)。

- (3) 改使軌道平台對準底座右腳的螺絲，如圖 3(b)所示。調整左腳的螺絲，直到軌道能夠平穩的停留在這個位置(放手後不會旋轉)。。
- (4) 重複以上步驟，使轉動平台不論處於哪一方位都會靜止，不會發生轉動。

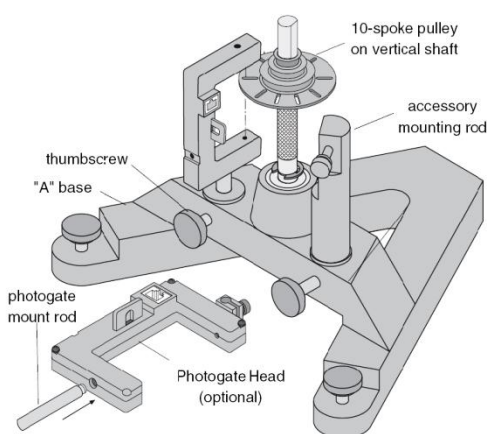
3. 安裝光電閘及滑輪：

光電閘的安裝位置和方式如圖 4(a)所示。

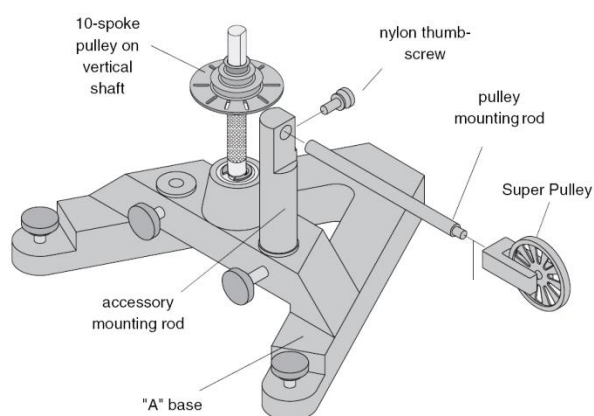
- (1) 將光電閘與光電閘支撐桿(photogate mount rod)結合。
- (2) 將光電閘支撐桿插入底座靠近轉動桿的孔上。(先鬆開孔上固定螺絲)
- (3) 讓光電閘支撐桿轉動，調整光電閘的方向與高度，讓紅外線光束可以通過 10 孔遮斷片的孔洞。小心光電閘高度，勿使光電閘接觸到遮斷片或被轉動平台撞到。
- (4) 可將光電閘插入數據紀錄盒，通電後轉動遮斷片。測試觀察光電閘末端的 LED 指示燈是否正常變化。

滑輪的安裝位置和方式如圖 4(b)所示。

- (1) 將滑輪與滑輪支撐桿(pulley mounting rod)結合。
- (2) 將滑輪輪面垂直，滑輪支撐桿插入黑色支撐桿的孔洞上，用螺絲固定。
- (3) 調整黑色支桿的方向與高度，讓繞在中心轉軸的線軸上面的線，能夠對齊滑輪上的溝槽。
- (4) 當要用線拉動轉動平台，調整 A 型底座位置，讓線能通過滑輪並不碰觸桌子邊緣。



4(a)



4(b)

圖 4、光電閘及滑輪的安裝示意圖。

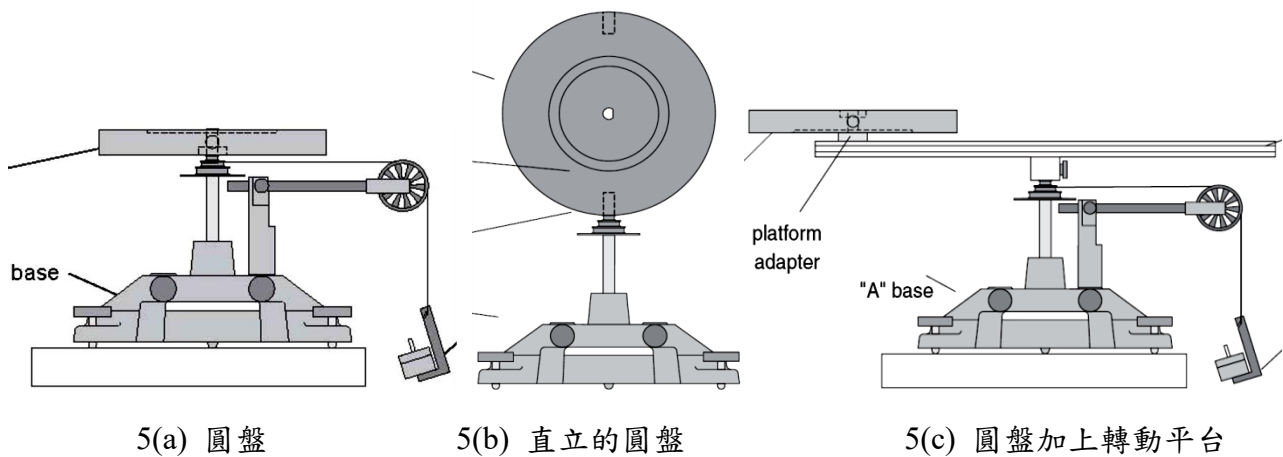


圖 5、三種待測轉動剛體組合方式示意圖。

4. 轉動剛體的組裝：

本實驗測量轉動慣量時，組裝架設方式主要有以下三種，對應的示意圖如圖 5 所示。

- (1) 若待測的轉動剛體**只有圓盤**。如圖 6(a)所示，可以先移下轉動平台(長直形金屬)，改將圓盤插進支撐桿上端。注意配合支撐桿頂部 D 形形狀方向。
- (2) 若待測的轉動剛體為**直立的圓盤**(轉軸在直徑方向)。圓盤可透過盤上多個不同位置的 D 形孔(D holes)，控制圓盤的轉動軸和轉動方式。位於盤之邊緣的 D 形孔，可設定轉動軸為通過此孔洞的直徑軸，讓整個圓盤繞此直徑軸轉動。
- (3) 若待測的轉動剛體為**圓盤加上轉動平台**(長直形金屬)。可將圓盤利用連接固定器(platform adapter)固定到在轉動平台上，如圖 6(b)所示。

將連接固定器鎖在轉動平台軌道上的方法：先將方形螺帽(square nut)先些許轉入連接固定器的螺絲上，從轉動平台(長直形金屬)側邊將連接固定器/方形螺帽滑入軌道。移到轉動平台中央或適當半徑的位置，再轉動連接固定器以將其鎖在轉動平台軌道上。

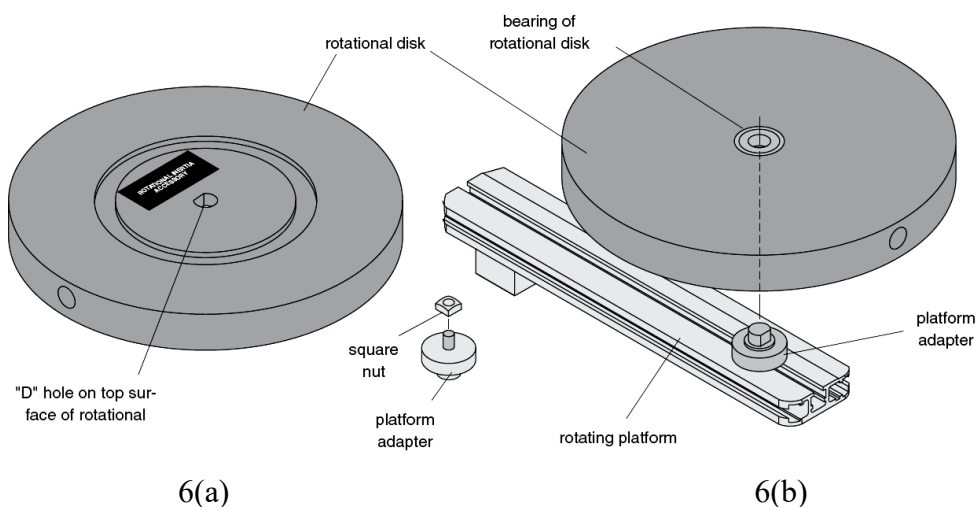


圖 6、圓盤轉體上四個 D 形孔洞位置和轉體組裝於轉動平台上的示意圖。

5. 利用實驗裝置測量轉動慣量：

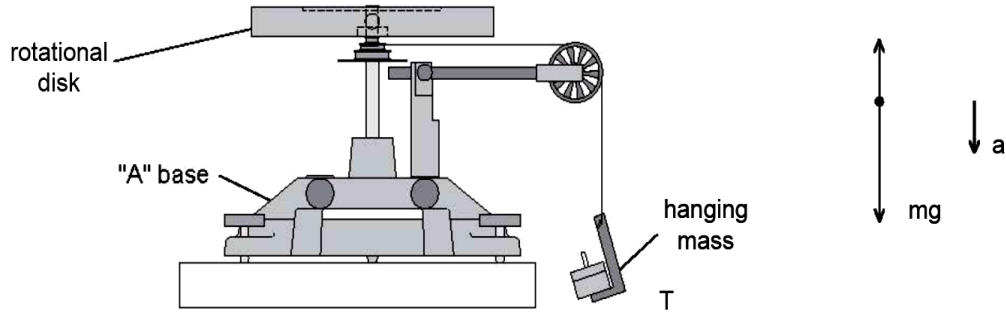


圖 7、圓盤轉動慣量測量的實驗裝置示意圖。

圖 7 以測量圓盤的轉動慣量為例，說明轉動慣量測量原理。(註：跟著轉動的除了圓盤，應該還有中央支撐桿、線軸與遮斷片等等，寫報告時可以評估討論其貢獻。)

實驗時，由繩子的張力 $\vec{T}$ 提供轉動所需的力矩 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T}$ 。當張力 $\vec{T}$ 與半徑 $\vec{r}$ 垂直(實驗時有小心調整滑輪，使繩子拉的方向在線軸切線方向)，則力矩大小為 $\tau = rT$ 。假設繞線對施力半徑的增加可以忽略，則 r 等於線軸的半徑(註：使用游標尺確認線軸直徑)。

當使用質量為 m 的懸掛物體提供拉力驅使圓盤加速轉動時， m 有往下移動的加速度 a ，按牛頓第二運動定律，可得

$$\sum F = mg - T = ma \quad (3)$$

可得線的張力 T 為

$$T = m(g - a) \quad (4)$$

驅使轉動的力矩大小為 $\tau = rT = r m(g - a) = I\alpha$ ，因此可得轉動慣量 I

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{r m(g - a)}{\alpha} \quad (5)$$

切線加速度 a 與轉動角加速度 α 有 $a = r\alpha$ 的關係，因此上式變成

$$I = \frac{r m(g - r\alpha)}{\alpha} = \frac{mgr}{\alpha} - mr^2 \quad (6)$$

當懸掛物體的質量甚小， mr^2 可忽略時，上式可近似為 $I \approx \frac{mgr}{\alpha}$ 。或

$$\alpha \approx \left(\frac{gr}{I} \right) m \quad (7)$$

亦即，當懸掛物體的質量甚小， mr^2 可忽略時，角加速度 α 與懸掛物體質量 m 成正比。

實驗時，可利用光電閘讀取轉動的角速率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{n T_n}$ 。其中， $n=10$ 為遮斷片孔數， T_n 為光電閘通過相鄰開孔的時間。當等角加速度時，角速率 ω 隨時間 t 作線性變化，亦即 $\omega = \omega_0 + \alpha t$ 。 ω_0 為時間 $t=0$ 時的角速率。若將角速率 ω 作為 y 軸，時間 t 作為 x 軸，則從數據圖的擬合線方程式 $y = Ax + B$ ，可以得到斜率 A 即為我們要測量的角加速度 α 。

本實驗利用電腦連接 Arduino 光電閘數據紀錄盒。相關實驗程式見實驗網頁。

6. 摩擦力的修正 (自選)：

考慮系統在轉動時有摩擦力造成的力矩，若假設 摩擦力力矩 τ_f 大小固定，則系統的總力矩修正為 $\tau - \tau_f = rT - \tau_f = r m(g - a) - \tau_f = I\alpha$ ，(6)式應修正為

$$I = \frac{r m(g - r\alpha) - \tau_f}{\alpha} = \frac{mgr}{\alpha} - \frac{\tau_f}{\alpha} - mr^2 \quad (8)$$

因此，由未將摩擦力力矩考慮進來的(6)式，計算所得的轉動慣量會高估一些。

可以用實驗方法的到摩擦力力矩 τ_f 。若不加外力(不懸掛質量 m)，小心用手推動使轉動慣量為 I 的系統轉動，由於摩擦力力矩 τ_f ，角速率 ω 會隨時間逐漸減小，角加速度為負值。若令摩擦力力矩貢獻的角加速度為 α_f (負值)，則 $-\tau_f = I\alpha_f$ ，或 $\tau_f = I|\alpha_f|$ 。

當懸掛質量 m 施加外力矩，且轉動方向為使質量 m 下降的方向(順向)，則此時測得的角加速度 α_F 滿足

$$\tau - |\tau_f| = r m(g - r\alpha_F) - |\tau_f| = I\alpha_F \quad (9)$$

當懸掛質量 m 施加外力矩，且轉動方向為使質量 m 上升的方向(逆向)，則此時測得的角加速度 α_R 滿足

$$\tau + |\tau_f| = r m(g - r\alpha_R) + |\tau_f| = I\alpha_R \quad (10)$$

將(8)式與(9)式相加除 2，可消去摩擦力力矩 $|\tau_f|$ ，得

$$r m \left(g - r \frac{(\alpha_F + \alpha_R)}{2} \right) = mgr - mr^2 \frac{(\alpha_F + \alpha_R)}{2} = I \frac{(\alpha_F + \alpha_R)}{2} \quad (11)$$

若令順向與逆向得到的角加速度平均 $\frac{(\alpha_F + \alpha_R)}{2} = \alpha_{avg}$ ，則

$$I = \frac{mgr}{\alpha_{avg}} - mr^2 \quad (12)$$

注意：當待測物的質量、配重位置等等改變時，摩擦力力矩可能亦會改變。可能需要重新評估與測量摩擦力。

[A] 圓盤與圓環的轉動慣量

當以均勻圓盤的中心軸轉動時，其轉動慣量 $I_{\text{圓盤}} = \frac{1}{2}MR^2$ ， M 為圓盤質量， R 為圓盤半徑。若是中空的圓環，其轉動慣量 $I_{\text{圓環}} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ ， M 為圓盤質量， R_1 與 R_2 為圓環內徑半徑與外徑半徑，如圖 8 所示。

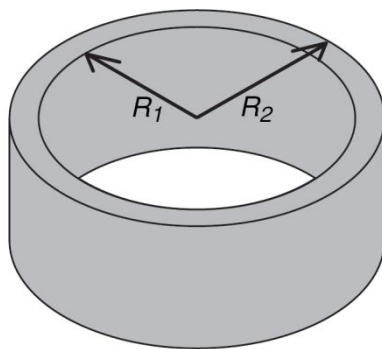


圖 8、中空的圓環。

實驗步驟：

圓盤的轉動慣量

1. 將圓盤裝在中心軸上，圓盤的凹槽面要朝上。
2. 架設光電閘與滑輪。光電閘連接 Arduino 光電閘數據紀錄盒，紀錄盒透過 USB 線 (USB Type A 接頭) 連接到電腦。開啟實驗網頁中提供的實驗程式，點擊 連接序列埠 (Connect Serial Port) 按鍵，選擇連線的 Arduino 裝置。然後點擊實驗程式中的 開始讀取 (Start Reading) 按鍵，可以即時讀取轉動資料。可點擊實驗程式中的 清除數據 (Clear Data) 以清除先前的數據。
3. 輕輕轉動圓盤，測試實驗程式是否可讀取到數據。(相關操作方式見實驗程式介面)
4. 以細繩懸掛約 50 g 的物體，將細繩繞在輪軸上，先不拉動系統。
(註：建議細繩繞上去的長度要夠長，使重物落地前仍維持細繩張力。)
5. 先清除舊數據，重新開始讀取轉動數據(角速率 ω 隨時間 t 的變化)。使細繩通過滑輪懸掛物體，輕輕釋放懸掛物體(避免突然拉扯到線)，測得角速率 ω 隨時間 t 的變化。
6. 將實驗程式中的數據複製，貼到試算表程式中。取角速率 ω 隨時間 t 線性變化的區間，進行線性擬合。由斜率值得到角加速度 α 。
7. 由(6)式計算出實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。
8. (自選) 將細繩繞在輪軸上，測量逆向時圓盤的角加速度 α_R 。由(12)式計算出實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。
(註：可以透過將細繩綁在線軸上，取適當線長，在轉盤順向轉動使線放到最長後，轉盤因慣性繼續轉動並開始捲回線使懸掛物體上升，達到逆向狀況。)

9. 增加懸掛物體質量 m ，測量角加速度 α 。至少改變 2 次懸掛物體質量 m (含先前共至少 3 種不同懸掛物體質量 m)，得到對應的角加速度 α 。由(6)式計算出各次實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。

10. 將各次不同質量 m 所得的角加速度 α ，作 α 隨 m 變化的關係圖。由斜率分析及(7)式得到轉動慣量，與理論值比較。

圓環的轉動慣量

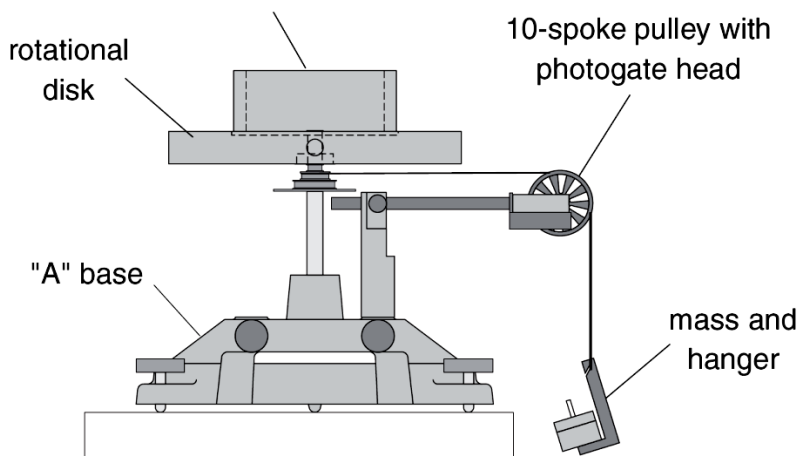


圖 9、圓盤加圓環的轉動慣量測量實驗裝置示意圖。

1. 將圓環放在圓盤的凹槽上，如圖 9。(先測量圓環的質量、內徑、外徑等必須資料)
2. 選取一個適當的懸掛物體質量 m ，測量角加速度 α 。
3. 計算出實驗所得的轉動慣量 $I_{\text{圓盤}} + I_{\text{圓環}}$ 。扣除先前實驗得到的 $I_{\text{圓盤}}$ ，得到 $I_{\text{圓環}}$ 的實驗值。
4. 以圓環轉動慣量公式，計算出 $I_{\text{圓環}}$ 的理論值。與上面得到的實驗值相比較。

[B] 直立圓盤的轉動慣量

若待測的轉動剛體為**直立的圓盤**(轉軸在直徑方向)，則轉動慣量為

$$I_{\text{立盤}} = \frac{1}{4}MR^2$$

M 為圓盤質量， R 為圓盤半徑。

實驗步驟：

直立圓盤的轉動慣量

1. 將圓盤從中心軸上取下，改用圓盤側邊的 D 形孔插到中心軸上，使圓盤可直立轉動。
2. 類似測量圓盤轉動慣量的方法，選取一個適當的懸掛物體質量 m ，測量角速率 ω 隨時間 t 的變化。由 ω - t 圖的斜率得到角加速度 α 。
3. 計算出實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。
4. (自選) 測量逆向時圓盤的角加速度 α_R 。由(12)式計算出實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。
5. (自選) 分析實驗所得的 ω - t 圖，當角速率 ω 較大時，斜率是否與 ω 較小時一樣? 解釋其原因。

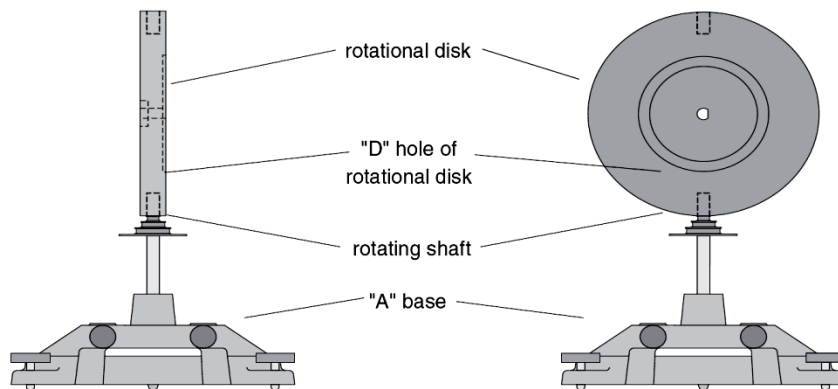


圖 10、測量直立圓盤轉動慣量的實驗裝置示意圖。

[C] 圓盤的偏離軸心轉動慣量

當圓盤以其軸心轉動時，轉動慣量 $I_{\text{圓盤}} = \frac{1}{2}MR^2$ 。但若圓盤的軸心與轉動的軸心不在相同位置及方向，而是平移了距離 d ，實驗裝置示意圖如圖 11，則此時的轉動慣量 $I_{\text{平移}} = I_{\text{圓盤}} + \frac{1}{2}Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}Md^2$ 。

考慮到系統在圓盤以外也有物體一起轉動貢獻的轉動慣量 I_0 ，則總轉動慣量為

$$I(d) = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}Md^2 + I_0 \quad (13)$$

若在不同平移距離 d 時測量出的角加速度為 $\alpha(d)$ 。則由(7)式可得

$$I(d) \approx \left(\frac{mgr}{\alpha(d)} \right) \approx \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}Md^2 + I_0 \quad (14)$$

或

$$\frac{1}{\alpha(d)} = \frac{1}{mgr} \left(\frac{1}{2}MR^2 + I_0 + \frac{1}{2}Md^2 \right) \quad (15)$$

因此，若將角加速度倒數 $\frac{1}{\alpha(d)}$ 作為 y 軸， d^2 作為 x 軸作圖時，由(15)式可知其斜率為 $\frac{1}{2} \frac{M}{mgr}$ ，截距為 $\frac{1}{mgr} \left(\frac{1}{2}MR^2 + I_0 \right)$ 。

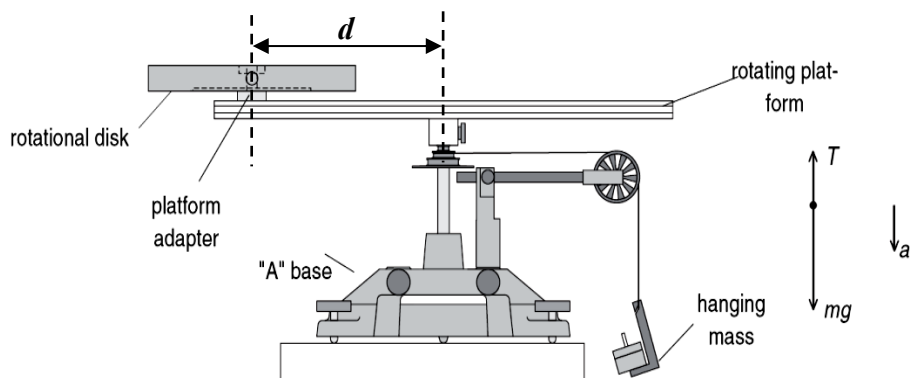


圖 11、圓盤加圓環的轉動慣量測量實驗裝置示意圖。

此處的轉動慣量 I_0 主要由固定圓盤位置的轉動平台(長直形金屬)提供，若將轉動平台的長直形金屬近似為總長 L 、質量為 M_L 的細長棒狀，則其轉動慣量為 $I_{\text{棒}} = \frac{1}{12}M_L L^2$ 。

實驗步驟：

圓盤的偏離軸心轉動慣量

1. 參考圖 6，架設轉動平台，將連接固定器移到轉動平台中央($d=0$)鎖緊。再將圓盤放到連接固定器上，測試是否穩固連接。
2. 以 $d=0$ 的條件，類似測量圓盤轉動慣量的方法，選取一個適當的懸掛物體質量 m ，測量角速率 ω 隨時間 t 的變化。由 $\omega-t$ 圖的斜率得到角加速度 α 。
3. 計算出實驗所得的轉動慣量，由 (13) 式可知， $d=0$ 時 $I(0) = \frac{1}{2}MR^2 + I_0$ 。將其扣除

先前實驗時得到的轉盤轉動慣量 $\frac{1}{2}MR^2$ ，可得到 $I_0 = I(0) - \frac{1}{2}MR^2$ 。可與 $I_{\text{棒}}$ 理論值比較。

(註：可用其他更精確的理論公式，計算轉動平台的轉動慣量 I_0)

4. (自選) 測量逆向時圓盤的角加速度 α_R 。由(12)式計算出實驗所得的轉動慣量，與理論值比較。

5. 改變 d 至少 4 次 (含原本 $d=0$ ，則共 5 個不同的 d)，測量各條件下的角加速度 $\alpha(d)$ 。

6. 以角加速度倒數 $\frac{1}{\alpha(d)}$ 作為 y 軸， d^2 作為 x 軸作圖。分析此實驗結果，與理論值比較。

[D] 角動量守恆

以圖 9 的圓盤與圓環的轉動慣量實驗裝置為基礎，但不懸掛重物。若使圓盤以角速率 ω_i 轉動，則此時圓盤有角動量

$$L_{\text{圓盤}} = I_{\text{圓盤}} \omega_i$$

當在圓盤上放上圓環時，若圓環初始沒有轉動，角動量等於 0，則圓盤加上圓環後總角動量仍相同，但角速率降為 ω_f 。由角動量守恆，可知

$$I_{\text{圓盤}} \omega_i = (I_{\text{圓盤}} + I_{\text{圓環}}) \omega_f \quad (16)$$

實驗步驟：

角動量守恆

1. 參考圖 9，架設圓盤與圓環的轉動慣量實驗裝置。
2. 不懸掛重物，不放上圓環時，旋轉圓盤，測量其角速率 ω 隨時間的變化。
3. 手持圓環靠近圓盤中央(距離近但不可碰到)，小心使圓環落到圓盤的環形凹槽上，過程中不可以讓手施加力矩，影響系統的角動量。
4. 由 角速率 ω 隨時間 t 的變化數據，找出放上圓環前的角速率 ω_i 與放上圓環後的角速率 ω_f 。
5. 將實驗結果與(16)式比較。